Modul 1

Lineare Gleichungen

Inhalt:

Schule: BerufsBildungBaden, 2003

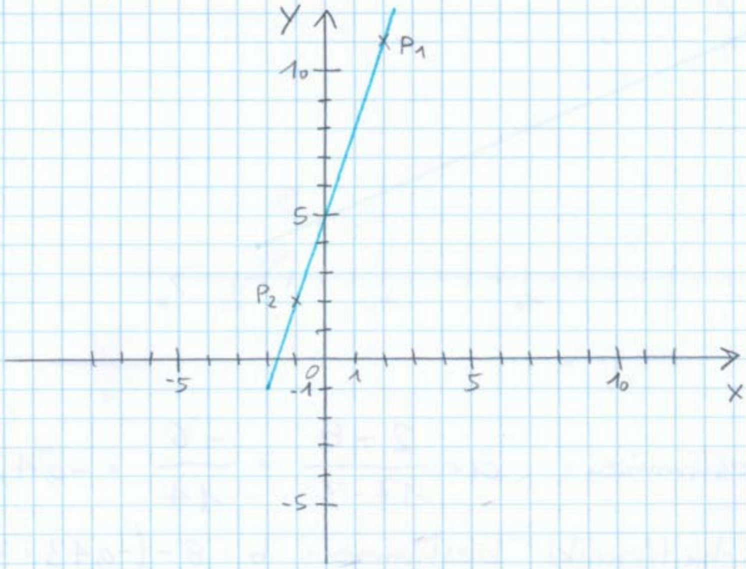
Lehrperson: Werner Graber

Quelle: www.markusbaumi.ch

Modul 1.1

Erstellen einer graphischen Darstellung einer linearen Funktion.

Zahlenbeispiel: $y(x) = 3x + 5$



Lösung:

1. 5 → Schnittpunkt mit der y-Achse
2. für x 2 einsetzen → P_1 (2/11)
3. für x -1 einsetzen → P_2 (-1/2)
4. Punkte verbinden

Verallgemeinerung:

geg.: $y(x) = ax + b$

1. Schnittpunkt mit y-Achse bestimmen
2. für x Werte einsetzen → $P_1, P_2, \ldots$

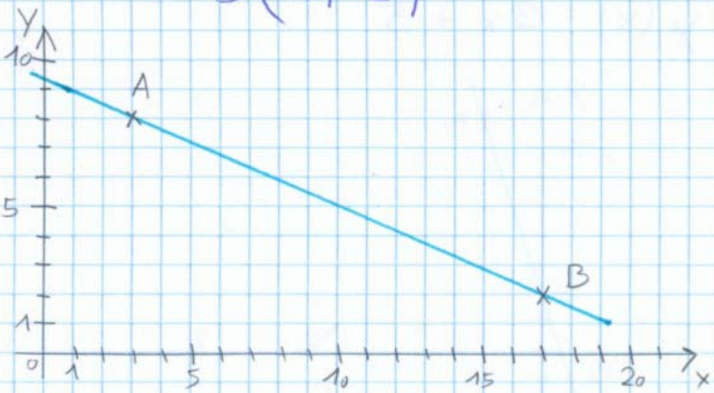
a → Steigung
b → Schnittpunkt mit y-Achse

Modul 1.2

Bestimmen der Funktionsgleichung aufgrund zweier vorgegebener Punkte.

Zahlenbeispiel: A (3 / 8)
B (17 / 2)

$y(x) = -0{,}429\,x + 9{,}286$



Lösung:

1. Steigung bestimmen: $a = \dfrac{2-8}{17-3} = \dfrac{-6}{14} = -0{,}42857\ldots$

2. y-Achsenschnittpunkt bestimmen: $b = 8 - (-0{,}43 \cdot 3) = 9{,}2857\ldots$

Verallgemeinerung:

1. Steigung bestimmen: $a = \dfrac{B_y - A_y}{B_x - A_x}$

2. y-Achsenschnittpunkt bestimmen:

$b = A_y - a \cdot A_x$

$b = B_y - a \cdot B_x$

Modul 1.3

Verschieben einer Geraden in horizontaler Richtung um die Strecke c.

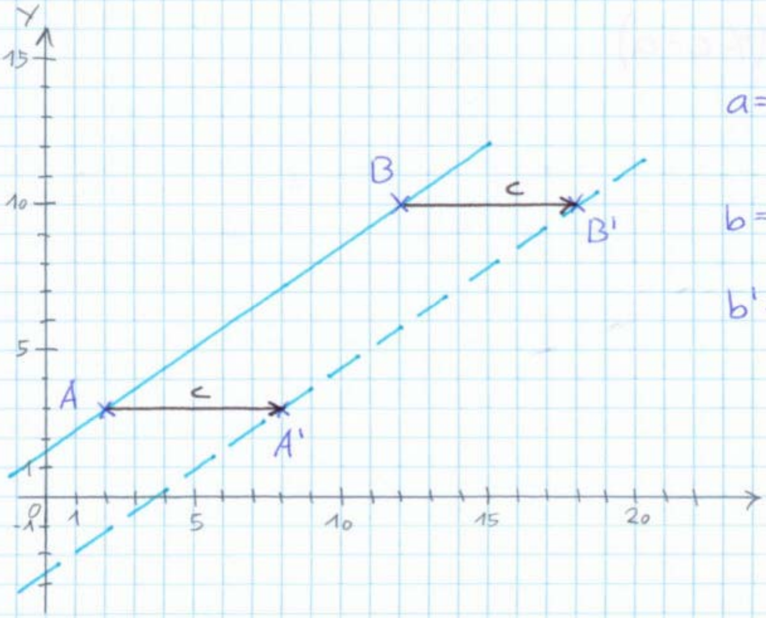
Zahlenbeispiel: $A(2/3)$

$B(12/10)$ $\quad y(x) = 0{,}7x + 1{,}6$

$c = +6$

$A' = (8/3)$

$B' = (18/10)$ $\quad y'(x) = 0{,}7x - 2{,}6$



$a = a' = \frac{10-3}{12-2} = \frac{7}{10} = \underline{0{,}7}$

$b = 3 - 0{,}7 \cdot 2 = \underline{1{,}6}$

$b' = 3 - 0{,}7 \cdot 8 = \underline{-2{,}6}$

Lösung:

1. x-Koordinaten mit c addieren → neue Punkte A', B'
   y-Koordinaten bleiben gleich
2. Steigung bleibt gleich
3. y-Achsenschnittpunkt bestimmen:

$$b' = b - c \cdot a = 1{,}6 - 6 \cdot 0{,}7 = \underline{-2{,}6}$$

Verallgemeinerung:

1. • x-Koordinaten mit c addieren, wenn pos. Verschiebung oder subtrahieren, wenn neg. Verschiebung.
   • y-Koordinaten bleiben gleich.

   $A(A_x / A_y) \rightarrow A'(A_x +/- c / A_y)$
   $B(B_x / B_y) \rightarrow B'(B_x +/- c / B_y)$

2. Die Steigung ist bei allen Geraden gleich.

3. Neuen y-Achsenschnittpunkt bestimmen:

$$b' = b - (+/- c \cdot a)$$

Modul 1.4

Verschieben einer Geraden in vertikaler Richtung um die Strecke c.

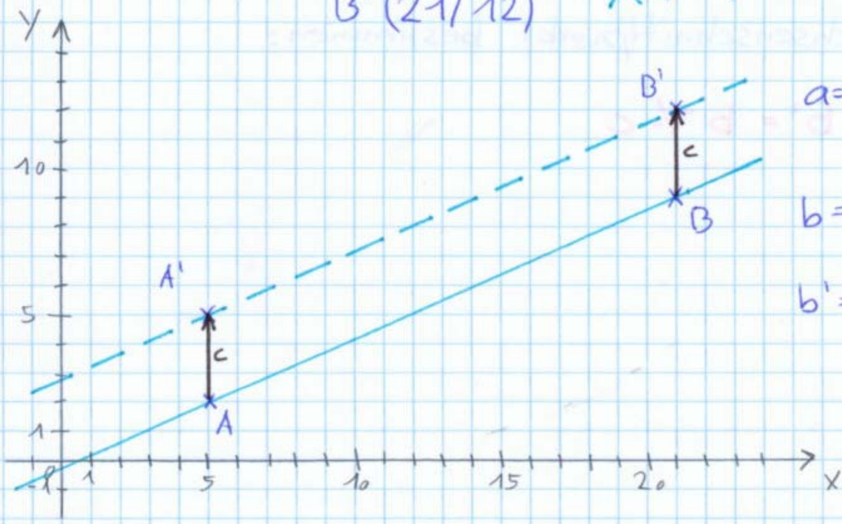
Zahlenbeispiel: $A(5/2)$

$B(21/9)$ $\quad y(x) = 0{,}44 \cdot x - 0{,}19$

$c = +3$

$A'(5/5)$

$B'(21/12)$ $\quad y'(x) = 0{,}44x + 2{,}81$



$$a = a' = \frac{9-2}{21-5} = \underline{0{,}4375}$$

$$b = 2 - 0{,}44 \cdot 5 = \underline{-0{,}1875}$$

$$b' = 5 - 0{,}44 \cdot 5 = \underline{2{,}8125}$$

Lösung:

1. y-Koordinaten mit c addieren → A', B'
   x-Koordinaten bleiben gleich
2. Steigung bleibt gleich
3. y-Achsenschnittpunkt bestimmen:

$$b' = b + c = -0{,}19 + 3 = \underline{2{,}81}$$

Verallgemeinerung:

1. • y-Koordinaten mit addieren, wenn pos. Verschiebung oder subtrahieren, wenn neg. Verschiebung.
   • x-Koordinaten bleiben gleich.

   $A\,(A_x / A_y) \rightarrow A'\,(A_x / A_y +/- c)$
   $B\,(B_x / B_y) \rightarrow B'\,(B_x / B_y +/- c)$

2. Die Steigung ist bei allen Geraden gleich.

3. Neuen y-Achsenschnittpunkt bestimmen:

   $b' = b +/- c$

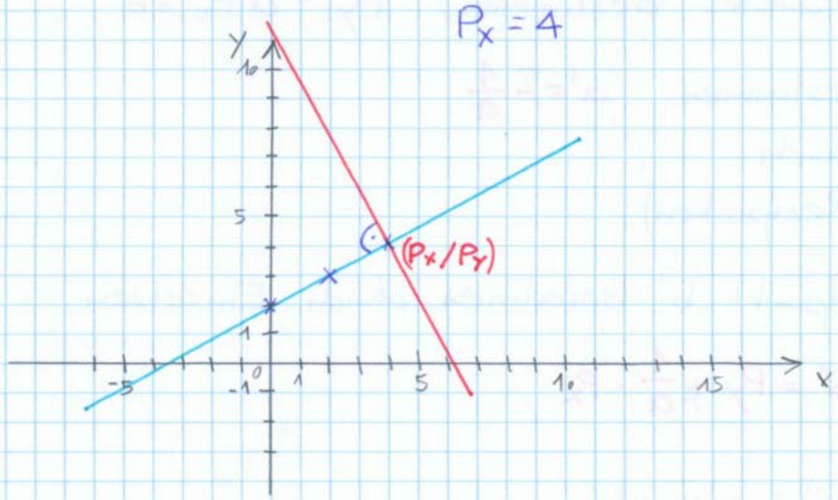
Modul 1.5

Senkrechte Gerade in einem Punkt auf einer gegebenen Geraden errichten.

Zahlenbeispiel: • Gerade $y(x) = \frac{1}{2} x + 2$ (1 → vertikale Versetzung; 2 → horizontale Versetzung)

• x-Koordinate des Punktes auf der Geraden

$P_x = 4$



Lösung:

1. Bestimmen des P_y-Wertes: $P_y = \frac{1}{2} \cdot 4 + 2 = \underline{4}$

2. Steigung a' der gesuchten Geraden $y'(x) = a' \cdot x + b'$ bestimmen:
   → Vorzeichen wechseln $\quad a' = -\frac{2}{1}$
   → Kehrwert

3. b' bestimmen: P einsetzen $4 = -2 \cdot 4 + b' \rightarrow b' = 12$

$$y'(x) = -2x + 12$$

Verallgemeinerung:

gegeben:
- die Gerade $y(x) = a \cdot x + b$
- der x-Wert des Schnittpunktes: P_x

Lösungsweg:

1. y-Wert des Punktes bestimmen: $P_y = a \cdot P_x + b$
2. Steigung a' bestimmen: $a' = +/- \frac{1}{a}$
   → Vorzeichen wechseln
   → Kehrwert (Reziproken)
3. y-Achsenschnittpunkt b' berechnen durch Einsetzen von P

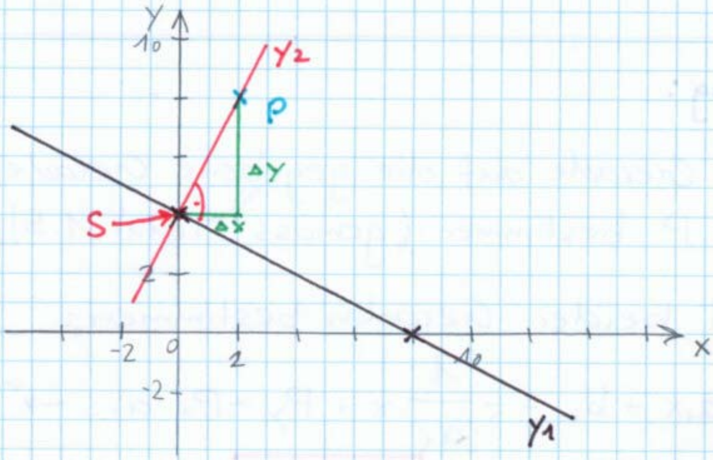
   $$b' = P_y +/- \frac{1}{a} \cdot P_x$$

$$\rightarrow \quad y'(x) = a'x + b'$$

Modul 1.6

Bestimmung der kleinsten Entfernung einer Geraden von einem Punkt.

Zahlenbeispiel: Geradengleichung $y_1(x) = -0{,}5x + 4$
Punkt P (2/8)



Lösungsweg:

1. Gleichung der Geraden aufstellen, die senkrecht auf der gegebenen Geraden steht und durch P geht:

Steigung (gemäss Modul 1.5) $a' = -\left(-\frac{2}{1}\right)$

$y_2 = a'x + b'$

und P einsetzen $8 = 2 \cdot 2 + b' \rightarrow y_2(x) = 2 \cdot x + 4$

2. Schnittpunkt der beiden Geraden durch Gleichsetzen bestimmen: $y_1 = y_2 \rightarrow -\frac{1}{2}x + 4 = 2x + 4$

$\rightarrow 2{,}5x = 0 \rightarrow \underline{\underline{x = 0}}$

y-Koordinate des Schnittpunktes durch einsetzen:

$y(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0 + 4 = \underline{\underline{4}} \rightarrow \underline{\underline{S(0/4)}}$

3. Distanz von S und P

Differenz der x-Koordinaten: $\Delta x = P_x - S_x = 2 - 0 = 2$

y-Koordinaten: $\Delta y = P_y - S_y = 8 - 4 = 4$

aus Pythagoras folgt die Distanz $d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

$= \sqrt{20} = \underline{\underline{2\sqrt{5}}}$

Verallgemeinerung:

1. Senkrechte Gerade auf die gegebene Gerade durch den Punkt P bestimmen (gemäss Modul 1.5)

2. Schnittpunkt beider Geraden bestimmen:

$$y_1 = a_1 x + b_1 = -\frac{1}{a_1} x + P_y - P_x \cdot a_1 \rightarrow S_x$$

$$S_y = a_1 \cdot S_x + b_1 \qquad \boxed{(S_x / S_y)}$$

3. Distanz von S und P

$$\Delta x = P_x - S_x$$
$$\Delta y = P_y - S_y \rightarrow \boxed{d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$