Modul 2

Quadratische Gleichungen

Inhalt:

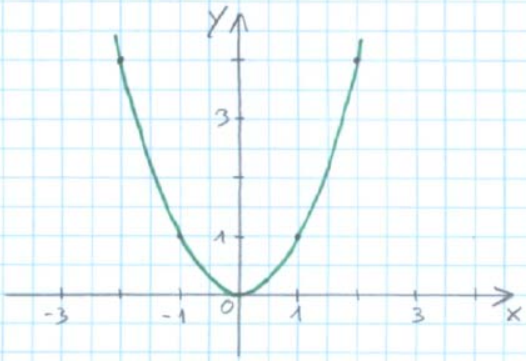
Schule: BerufsBildungBaden, 2003

Lehrperson: Werner Graber

Quelle: www.markusbaumi.ch

2. Quadratische Gleichungen

2.1 Normalparabel



$$y(x) = x^2$$

2.2 Normalform

$$y(x) = \underbrace{ax^2}_{\text{quadratischer Term}} + \underbrace{bx}_{\text{linearer Term}} + c \rightarrow \text{konstanter Term}$$

Scheitelpunktgleichung:

Scheitelpunkt $S(x_s / y_s)$

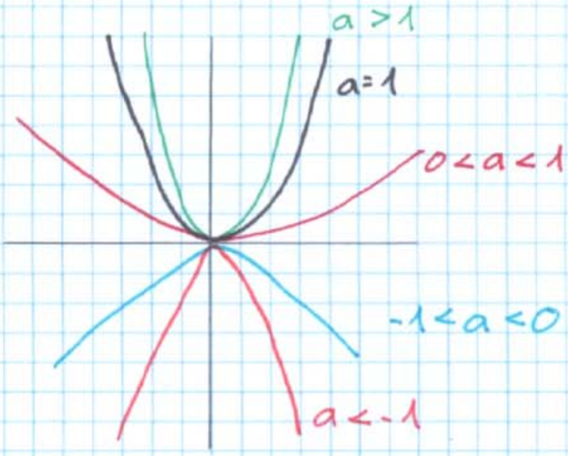
$$y(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$$

$$y(x) = ax^2 - 2ax_s \cdot x + a \cdot x_s^2 + y_s$$

$$b = -2ax_s \qquad c = ax_s^2 + y_s$$

$$\boxed{x_s = -\frac{b}{2a}} \qquad \boxed{y_s = c - ax_s^2}$$

Bedeutung von a:



Bedeutung von b:

Horizontalverschiebung um $-\frac{b}{2a}$

Bedeutung von c:

Vertikalverschiebung um $+c$

2.3 Schnittpunkt einer Parabel mit einer Geraden

$y_1 = a'x + b' \qquad y_2 = ax^2 + bx + c$

$$a'x + b' = ax^2 + bx + c$$
$$0 = ax^2 + (b - a')x + (c - b')$$

$$D = (b - a')^2 - 4a(c - b')$$

$$x_{1,2} = \frac{-(b - a') \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$y_{1,2} \Rightarrow$ Einsetzen in $a'x + b'$

2.4 Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse

Bestimmung der Lösungen der quadratischen Gleichung:

$$y(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

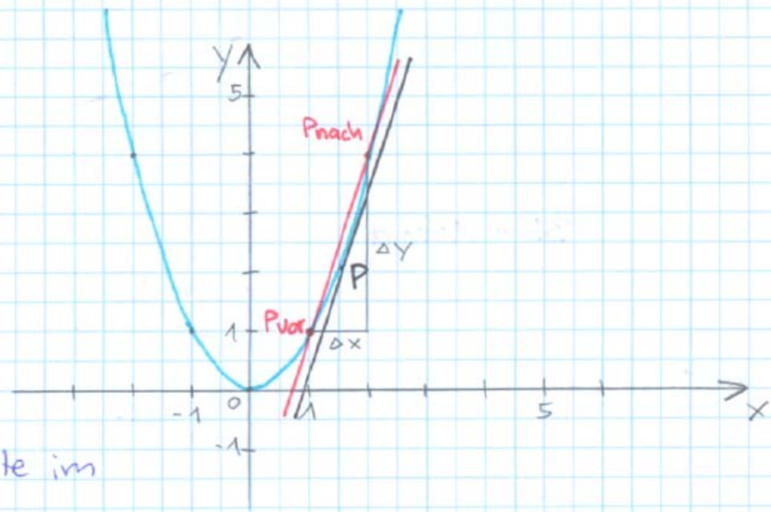
1. Diskriminante $D = b^2 - 4ac$

$D > 0 \rightarrow$ 2 Lösungen
$D = 0 \rightarrow$ 1 Lösung
$D < 0 \rightarrow$ keine Lösung

2. Lösungen $\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$ Nullstellen

2.5 Tangente an eine Parabel durch einen Punkt auf der Parabel

Beispiel: $y(x) = x^2$



Bestimmung der Tangente im Punkt $P(1{,}5 / 2{,}25)$

Die Steigung ergibt sich aus der Geraden durch die Punkte $P_{vor}(1/1)$ und $P_{nach}(2/4)$.
Wichtig ist, dass die Punkte P_{vor} und P_{nach} symmetrisch von P liegen.

Steigung $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

b durch Einsetzen von P in die Geradengleichung $y(x) = ax + b$
$\rightarrow b = P_y - a \cdot P_x$

2.6 Bestimmung der Parabelgleichung durch 3 Punkte

Beispiel: geg: 3 Punkte $P(-4/8)$
$Q(0/0)$
$R(10/15)$

ges: 3 Parameter a, b, c in $y(x) = ax^2 + bx + c$

Lösung: Alle 3 Punkte müssen diese Funktionsgleichung erfüllen.

$8 = a \cdot (-4)^2 + b \cdot -4 + c$ $\quad | \cdot 2{,}5$

$1 \longrightarrow 20 = 40a - 10b$

$0 = 0 + 0 + c \rightarrow c = 0$

$15 = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$

$2 \longrightarrow 15 = 100a + 10b$

1 und 2 addieren $35 = 140a$

$\rightarrow a = 1/4$

$8 = 1/4 \cdot 16 - 4b \rightarrow b = -1$

$\underline{\underline{y(x) = 1/4\, x^2 - x}}$

2.7 Tangente an eine Parabel

Beispiel: Parabel $y_1(x) = 0{,}5x^2 + 4x + c$
Gerade $y_2(x) = 0{,}8x - 10$

1. Berührungspunkt erfüllt beide Funktionsgleichungen.

$$0{,}5x^2 + 4x + c = 0{,}8x - 10 \rightarrow \underbrace{0{,}5x^2}_{a'} + \underbrace{3{,}2x}_{b'} + \underbrace{10 + c}_{c'} = 0$$

2. Diese Gleichung soll nur eine Lösung haben.

$$D = 0$$

$$D = b'^2 - 4a'c' = 3{,}2^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot (10 + c) = 0$$
$$= 10{,}24 - 20 - 2c \rightarrow \underline{\underline{c = -4{,}88}}$$

2.8 Extremwertaufgabe

Bestimmung des Maximums ($a < 0$) oder Minimums ($a > 0$) einer quadratischen Funktion.

Beispiel: $y(x) = 0{,}75x^2 - 7{,}5x + 24{,}75$ ($a > 0 \rightarrow$ Minimum)

Wo liegt das Minimum? Scheitelpunkt x-Koordinate

$$x_S = -\frac{b}{2a} = \frac{7{,}5}{1{,}5} = \underline{5}$$

Welchen Wert hat das Minimum? Scheitelpunkt y-Koordinate

$$y_S = c - a \cdot x_0^2 = 24{,}75 - \tfrac{3}{4} \cdot 25$$
$$= \underline{6}$$

$$\underline{\underline{S\ (5/6)}}$$