

schiefer Zylinder

Ellipsen

1. Einleitung	Seite 2
2. Zielsetzung	Seite 2
3. Lernziele	Seite 2
4. Definitionen - Formeln	Seite 3
5. Berechnungen	Seite 4
6. Ellipsenkonstruktion	Seite 5
7. Schnittflächen.....	Seite 7
8. Resultat - Reflexion	Seite 9
9. Übungsaufgaben	Seite 10
A. Anhang.....	Seite 11

Autoren: Carlo Schmid, Markus Baumgartner
Projekt: Stereometrie 2004
Projektleiter: Werner Graber
Schule: BerufsbildungBaden

1. Einleitung

In diesem E-Learning-Modul beschäftigen wir uns mit schrägen Zylindern und Ellipsen. Das Erstellen eines schiefen Zylinders aus Scheiben, die parallel zur Grundfläche liegen, ist ein wesentlicher Bestandteil dieses Modules. Einen weiteren Schwerpunkt bilden die Berechnungen an Ellipsen und Zylindern.

Eine Ellipsenfläche erhalten wir, wenn der schiefe Zylinder geschnitten wird. Ausnahme: Wenn die Schnittfläche lotrecht auf die Achse steht, erhalten wir einen Kreis.

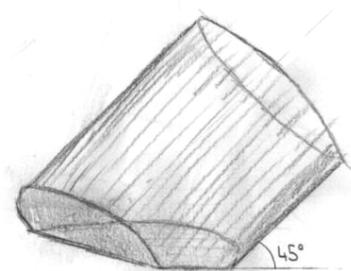
Alle benötigten Formeln werden erarbeitet und angewandt. Zudem wird ausführlich erklärt, wie eine Ellipse ohne elektronische Hilfsmittel konstruiert werden kann.

2. Zielsetzung

Bei der Suche nach einem zu behandelnden Thema der Stereometrie war uns die Idee, einer Darstellung von einem bestimmten Körper am sympathischsten. Aber auf welche Art und Weise sollten wir dies durchführen? Wir diskutierten lange darüber, einen Körper aus vertikal stehenden Papierscheiben herzustellen, welche sich bei Einschnitten ineinander stecken lassen. Auch war die Wahl des Körpers nicht einfach, es gibt ja so viele verschiedene. Am Schluss entschieden wir uns für einen abgeschnittenen, schräg stehenden Zylinder, welcher aus aufeinander liegenden, 1,5 mm dicken Kartonscheiben aufgebaut sein soll. Wir wollen so demjenigen, der unsere E-Learning-Einheit durchdenkt zeigen, wie ein solcher Zylinder aufgebaut ist und wie er bei der Konstruktion der Scheiben vorzugehen hat.

3. Lernziele

- alle Zylinderelemente erkennen und berechnen können
- Neigungswinkel von Zylindern berechnen
- arbeiten mit Ellipsen
- berechnen der Ellipsenachsen
- konstruieren von Ellipsen
- erstellen eines schiefen Zylinders aus Ellipsenscheiben



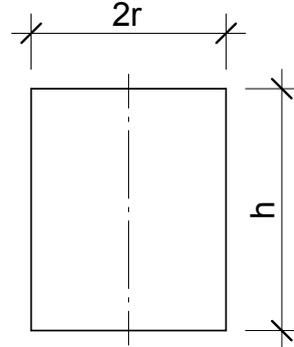
4. Definitionen - Formeln

Zylinder:

Ein Zylinder ist ein Körper mit einer runden Grundfläche und einer bestimmten Höhe.

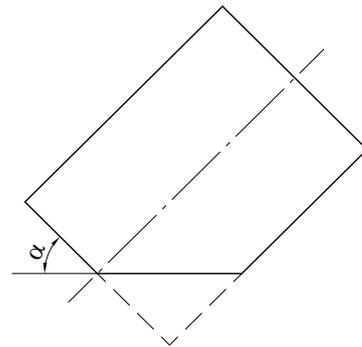
Volumen: $V = r^2 \cdot \pi \cdot h$

Oberfläche: $O = 2r\pi(r + h)$



schiefer Zylinder:

Der schiefe Zylinder ist um einen bestimmten Neigungswinkel gekippt. Dem Zylinder fehlt jedoch ein Stück, da er auf einer Fläche parallel zur Unterlage steht. Ähnlich wie der schiefe Turm von Pisa. Der sinkt jedoch auf der einen Seite ein und behält daher das gesamte Volumen.



Ellipse:

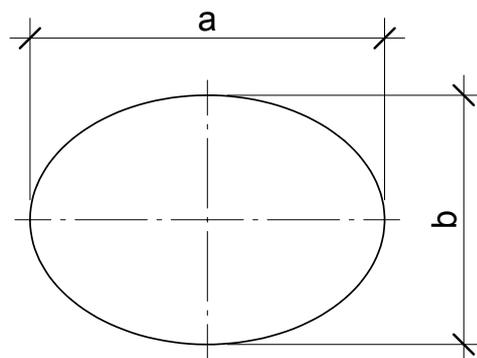
Die Ellipse hat einen grössten (Hauptachse a) und einen kleinsten Durchmesser (Nebenachse b), die senkrecht aufeinander stehen. Für jeden Punkt der Ellipsenumrandung haben die Summen der Abstände von zwei festen Punkten (Brennpunkte) den gleichen Wert.

Fläche: $A = \frac{a \cdot b \cdot \pi}{4}$

Hauptachse: $a = \frac{4A}{b \cdot \pi}$

Nebenachse: $b = \frac{4A}{a \cdot \pi}$

Umfang: $u \approx \frac{a+b}{2} \cdot \pi$



5. Berechnungen

Nun kommen wir zu den Berechnungen an unserem Beispielkörper. Unser Zylinder hat einen Durchmesser von 5 cm und der Neigungswinkel soll 45° betragen.

Da die Ellipsenscheiben aus 1,5 mm starkem Karton gefertigt werden, haben wir eine Höhe von 6,6 cm gewählt.

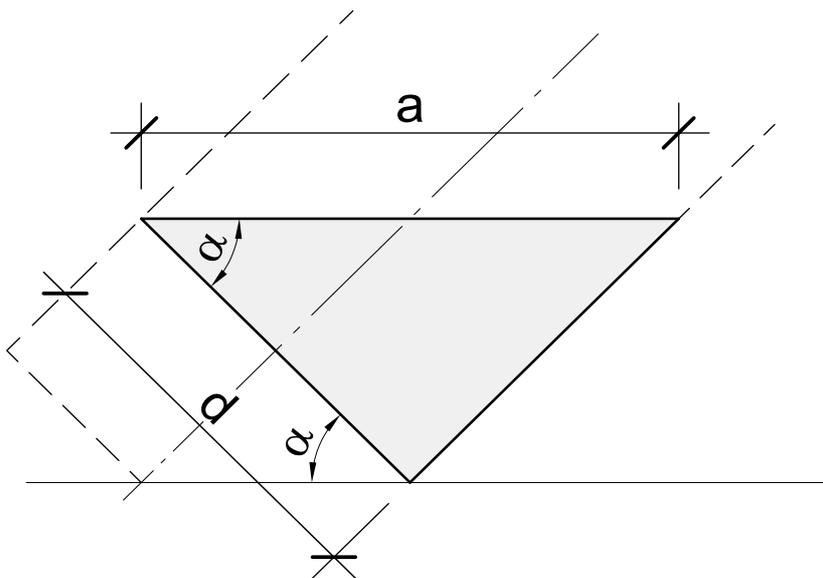
Radius: $r = 2,5 \text{ cm}$

Neigungswinkel: $\alpha = 45^\circ$

Anzahl Scheiben: $66 \text{ mm} : 1,5 \text{ mm} = 44 \text{ Scheiben}$

Länge Nebenachse: $d = b = 5,0 \text{ cm}$

Länge Hauptachse:



$$\cos(\alpha) = \frac{d}{a}$$

$$\cos(45^\circ) = \frac{5 \text{ cm}}{a}$$

$$a = \frac{d}{\cos(\alpha)}$$

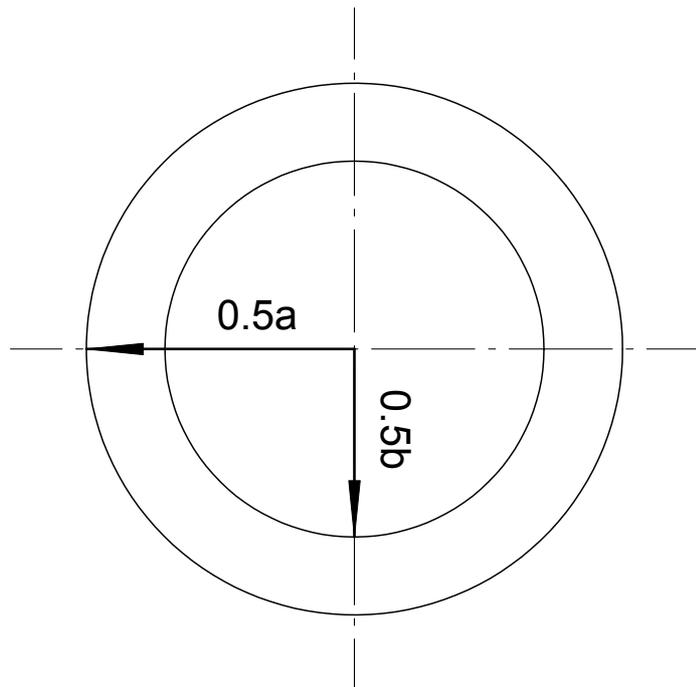
$$a = \frac{5 \text{ cm}}{\cos(45^\circ)} = 7,07107 \text{ cm} \approx 7,07 \text{ cm}$$

6. Ellipsenkonstruktion

1. Radien zeichnen

Zuerst wird ein Mittelpunkt bestimmt, der als Zentrum für die Kreise dient. Danach werden die beiden Kreise, mit den zuvor errechneten Radien gezeichnet.

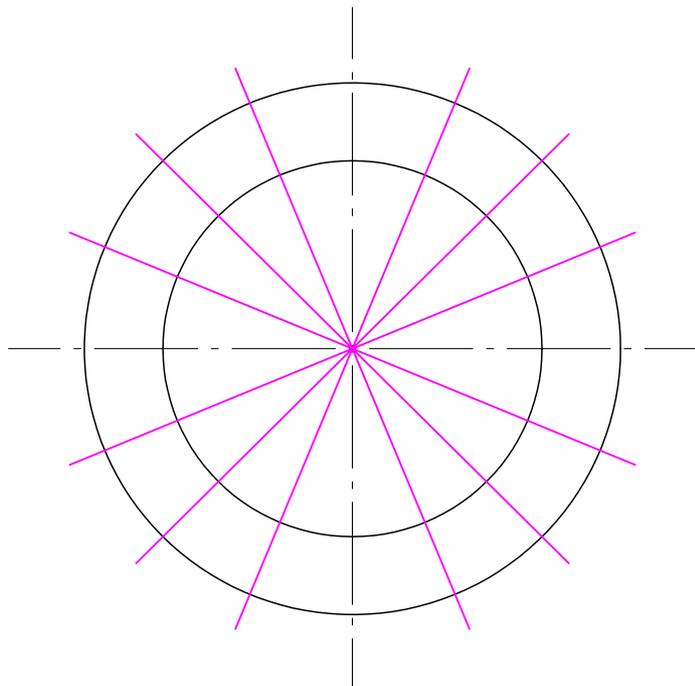
Für unseren Beispielkörper haben wir einen Radius $r = 0,5b = 2,5 \text{ cm}$ und für $0,5a$ setzen wir $3,5 \text{ cm}$ ein.



2. Kreis unterteilen

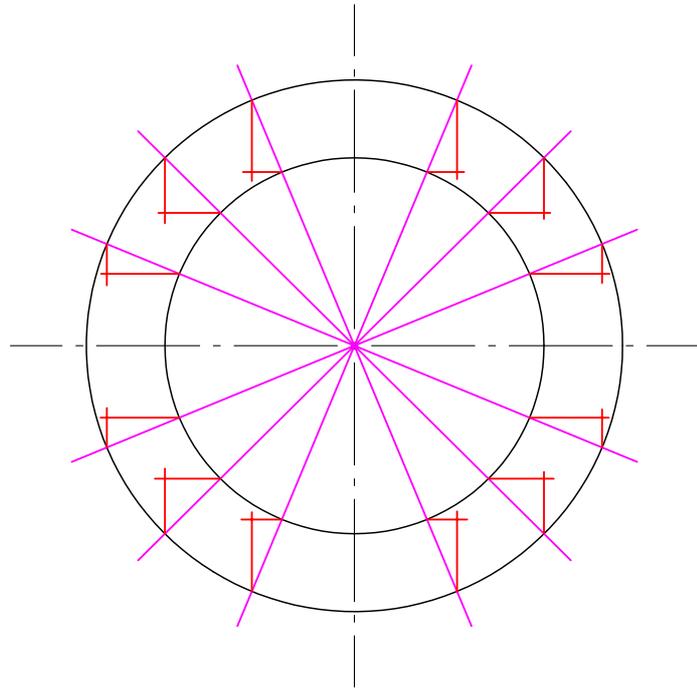
Nun wird der äussere Kreis in eine gerade Anzahl Teile unterteilt. Je mehr Teile festgelegt werden, desto genauer wird am Schluss die Ellipse.

Wir haben den Kreis in 16 Stücke unterteilt. Die einzelnen Strahlen schliessen somit einen Winkel von $22,5^\circ$ ein.



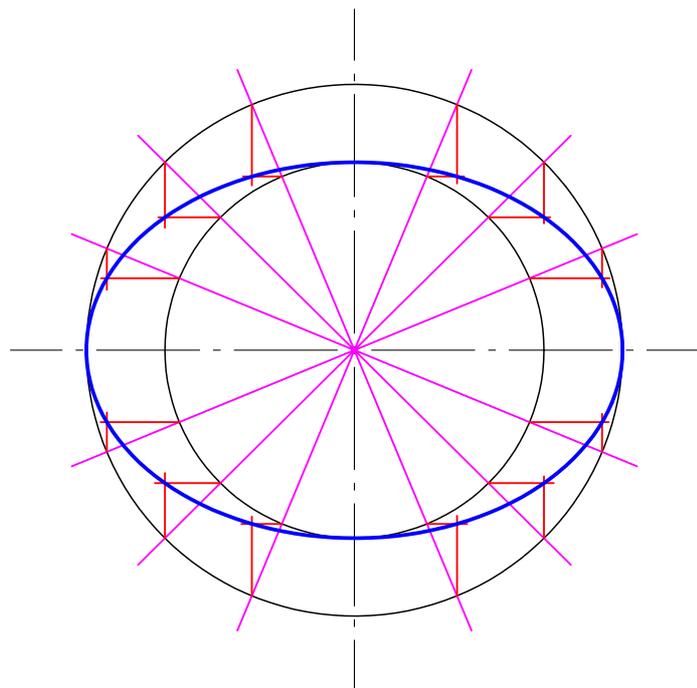
3. Lote fällen

Die Lote vom Schnittpunkt der Strahlen mit dem äusseren Kreis werden auf die horizontale Achse gefällt. Diejenigen Schnittpunkte vom kleinen Kreis werden auf die vertikale Achse rechtwinklig abgetragen und anschliessend verlängert.



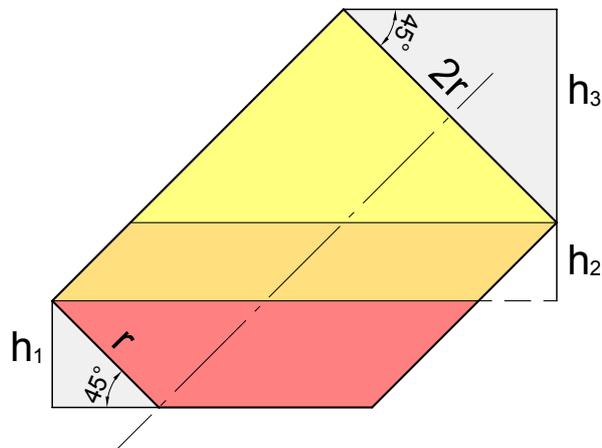
4. Ellipse zeichnen

Die erhaltenen Schnittpunkte der Lote können nun von Hand oder mit dem Kurvenlineal verbunden werden.



7. Schnittflächen

Anzahl Scheiben:



$$h_1 = 2,5\text{cm} \cdot \sin(45^\circ) = 1,77\text{cm}$$

11 Scheiben

$$h_2 = h - h_1 - h_3 = 1,30\text{cm}$$

9 Scheiben

$$h_3 = 5,0\text{cm} \cdot \sin(45^\circ) = 3,54\text{cm}$$

24 Scheiben (Wobei die oberste so klein ist, dass sie nicht ausgeschnitten werden kann.)

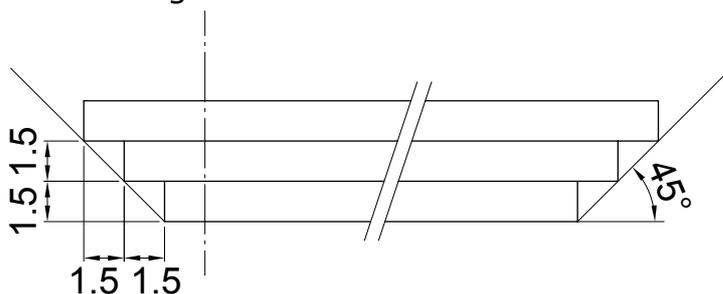
Grösse der Scheiben:

Da der Zylinder schief steht, müssen die Kartonscheiben bei der Grund- und Deckfläche geschnitten werden, sie bilden nicht volle Ellipsen aus. Im Folgenden beschäftigen wir uns mit der Berechnung der Schnittlinie.

Nun legen wir fest, dass die Grössen der Flächen an der Oberkante jeder Ellipsenscheibe bestimmt werden. Dadurch merken wir, dass die oberste Scheibe eine Kante sein sollte. Diese Scheibe können wir nicht fertigen und lassen sie deshalb weg.

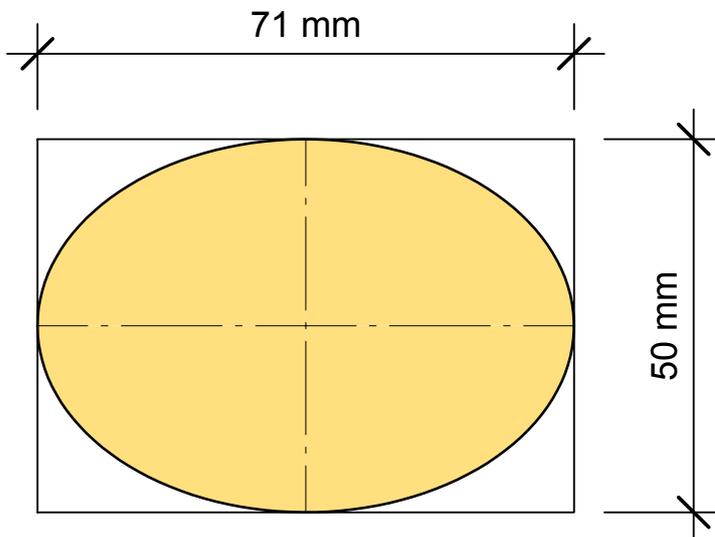
Die Scheiben im **Roten** und **Gelben** Bereich müssen auf einer Seite gestutzt werden. Im **Orangen** Bereich können wir Ellipsen mit der ganzen Fläche verwenden.

Die Kartonscheiben sind 1,5 mm stark. Beim Übereinanderlegen entsteht dadurch am Rand eine Treppenform. Da wir einen Winkel von 45° gewählt haben, stehen die Scheiben auf jeder Seite 1,5 mm über die darunterliegende hinaus.



Beispiel:

Im Orangen Bereich haben die Ellipsen die gesamte Fläche. Berechnung siehe weiter oben.

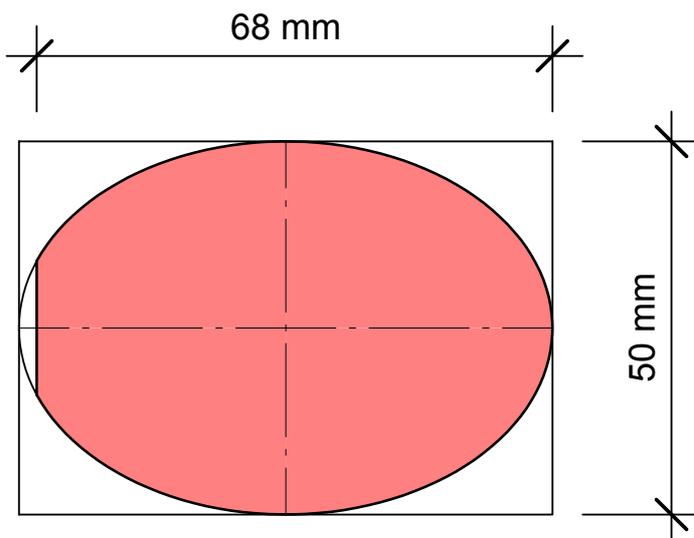


12. Scheibe von unten

Da wir die Scheibengröße Oberkant bestimmen, hat die Hauptachse der untersten Scheibe eine Länge von 38,5 mm. Pro Scheibe kommen nun auf beiden Seiten 1,5 mm hinzu, also 3 mm pro Lage. Somit hat die 11. Lage eine Hauptachsenlänge von:

$$35,5 \text{ mm} + 11 * 3 \text{ mm} = \mathbf{68,5 \text{ mm}}$$

Die 0,5 mm, die sich bei der Berechnung ergeben, runden wir immer ab.



11. Scheibe von unten

Schnittmuster der Scheibenflächen siehe im Anhang

8.Resultat - Reflexion

Das Konstruieren der einzelnen Scheiben war eigentlich recht einfach. Wir konnten bei jeder Scheibe jeweils dieselbe Grundellipse verwenden und mussten diese nur noch entsprechend der Höhe ablängen. Beim Erstellen des Körpers stiessen wir allerdings auf Schwierigkeiten. Beispielsweise waren die Scheiben nicht genau 1,5 mm dick, der Körper wurde höher als vorgesehen. Hinzu kam, dass die Kartonscheiben durch den flüssigen Leim aufquollen und verzogen wurden. Neben der Ungenauigkeit in der Höhe ergab sich zusätzlich eine leichte Krümmung an der oberen Seite. Die Dreiteilung des Körpers haben wir mit Farbe markiert, mit deren Feuchtigkeit sich der Karton noch zusätzlich verzogen hat.

Aber warum sind uns all diese Fehler unterlaufen? Wahrscheinlich da wir nicht unbedingt die allerbesten Materialien zur Verfügung hatten. Es spielt uns grundsätzlich auch keine Rolle, ob dieser Körper ein wenig vom geplanten abweicht, wichtig für uns war es, den Aufbau eines schief stehenden Zylinders nachvollziehen und die dazu benötigten Scheiben berechnen zu können. Das haben wir aus unserer Sicht erreicht.

9. Übungsaufgaben

einfache Zylinderberechnungen:

- 1 Berechne Volumen und Oberfläche
 - a) $r = 5 \text{ cm}$ $h = 9 \text{ cm}$
 - b) $r = 12,75 \text{ m}$ $h = 4,35 \text{ m}$
- 2 Berechne den Radius
 - a) $V = 25 \text{ dm}^3$ $h = 30 \text{ cm}$
 - b) $M = 365 \text{ mm}^2$ $h = 6,05 \text{ mm}$

Ellipsenberechnungen:

- 3 Berechne die Länge der Hauptachse
 - a) $b = d = 5 \text{ cm}$ $\alpha = 45^\circ$
 - b) $r = 3 \text{ cm}$ $\alpha = 60^\circ$
- 4 Berechne die Länge der Nebenachse (Durchmesser des Zylinders)
 - a) $a = 9,60 \text{ cm}$ $\alpha = 40^\circ$
 - b) $2a = 26 \text{ dm}$ $\alpha = 35^\circ$
- 5 Berechne den Neigungswinkel
 - a) $r = 2 \text{ m}$ $a = 15,46 \text{ m}$
 - b) $u = 30,79 \text{ cm}$ $a = 1,45 \text{ dm}$
- 6 Zeichne eine Ellipse
 $r = 22 \text{ mm}$
 $a = 78 \text{ mm}$
- 7 Berechne die Fläche
 - a) $r = 3 \text{ cm}$ $a = 10 \text{ cm}$
 - b) $b = 15 \text{ m}$ $2a = 46 \text{ m}$
- 8 Berechne das Volumen und das Gewicht der Ellipsenscheiben aus Aufgabe 8, wenn sie aus einem 2,5 mm starken Kupferblech ($\rho = 8,93 \text{ kg/dm}^3$) geschnitten wird.

A. Anhang

Quellenverzeichnis:

Formeln, Definitionen: Mathematik für Mittelschulen, Geometrie von Peter Frommenwiler und Kurt Studer
 Formeln: Masse Formeln Tabellen von Otto Lippuner

Lösungen zu den Aufgaben:

1 a) $V = 706,86 \text{ cm}^3$ $O = 439,82 \text{ cm}^2$
 b) $r = 2221,57 \text{ m}^3$ $O = 1369,89 \text{ m}^2$

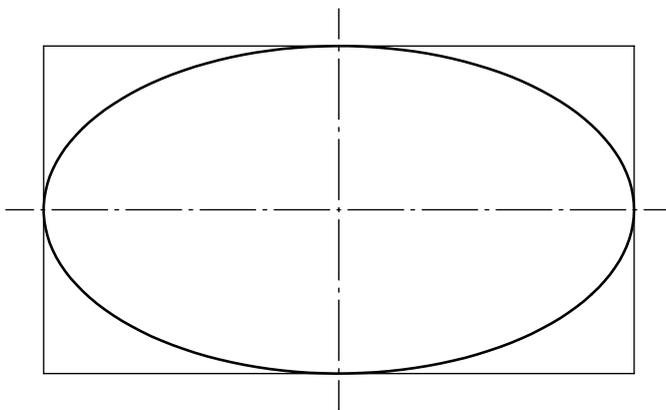
2 a) $r = 1,63 \text{ dm}$ b) $r = 9,60 \text{ mm}$

3 a) $a = 7,07 \text{ cm}$ b) $a = 12,00 \text{ cm}$

4 a) $b = 7,35 \text{ cm}$ b) $b = 10,65 \text{ dm}$

5 a) $\alpha = 75,01^\circ$ b) $\alpha = 47,47^\circ$

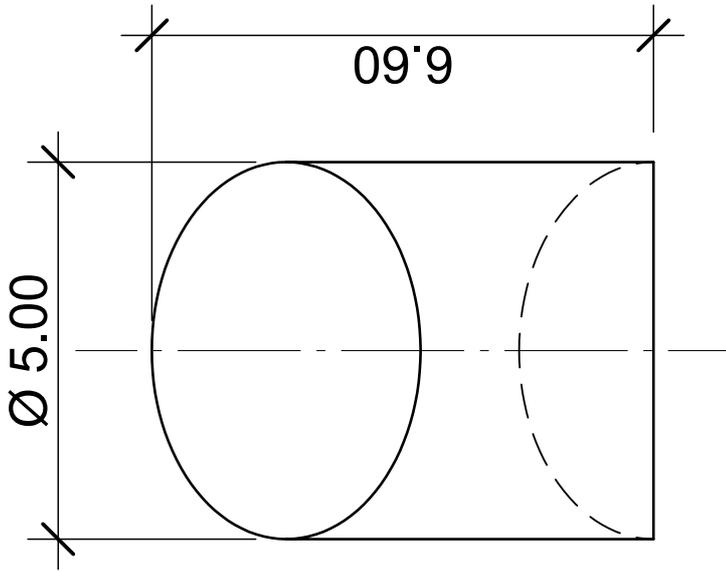
6



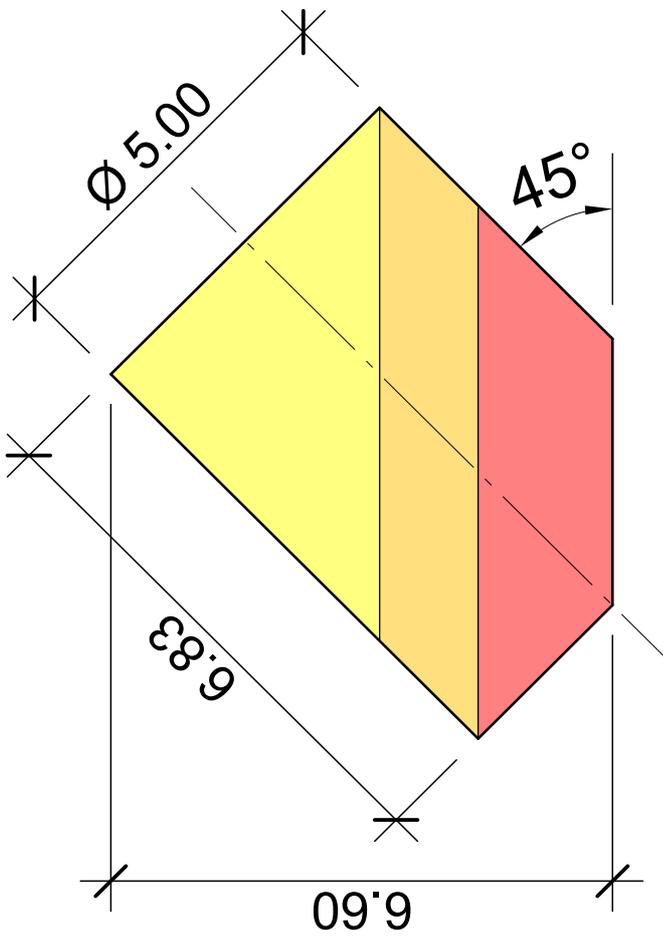
7 a) $A = 47,12 \text{ cm}^2$ b) $A = 270,86 \text{ m}^2$

8 a) $V = 11,78 \text{ cm}^3$ $m = 105,20 \text{ g}$
 b) $V = 677,41 \text{ dm}^3$ $m = 6049,23 \text{ kg}$

Technische Zeichnung:
Masstab 1:1



Aufriss



Seitenriss

Grundriss

